

YLIOPISTOMATEMATIIKAN SÄHKÖISTEN TEHTÄVIEN VIRHELUOKITTELUN JA MATEMAATTISEN AJATTELUN KEHITTÄMINEN

Tuomas Myllykoski, Pekka Mattila, Simo Alilöyty, Terhi Kaarakka &
Elina Viro

Tampereen teknillinen yliopisto

TIIVISTELMÄ

Matemaattisten tehtävien ratkaisujen kirjoittaminen digitaaliseen muotoon yleistyy koko ajan yo-kirjoitusten, sähköisen tenttimisen ja verkkokurssien vuoksi. Samalla tarve ratkaisujen automaattiseen arviointiin kasvaa. Vaikka monet peruskurssitason harjoitustehtävät tarkastetaan jo nyt sähköisesti, olisi hyödyllistä tarkastaa opiskelijan koko päättelyketju pelkän vastauksen sijaan. Tampereen teknillisessä yliopistossa on pitkään testattu sähköisesti ensimmäisen vuoden opiskelijoiden matemaattisia perustaitoja, jotta tukitoimet osataan kohdistaa ongelma-alueisiin, kuten trigonometriaan. Tässä julkaisussa luokitellaan virheet, joita opiskelijat tekevät yhdessä trigonometrian tehtävässä ja pohditaan, kuinka tätä voidaan hyödyntää opiskelijoille annettavassa, automatisoidussa palautteessa siten, että palautteella ohjataan opiskelijan matemaattisen ajattelun kehittymistä.

JOHDANTO

Ylioppilaskirjoitusten ja opintojen yleisesti digitalisoituessa tarve automaattiseen arviointiin ja pedagogisesti mielekkäiden sähköisten palautteiden antamiseen kasvaa. Automaattinen arviointi ei kuitenkaan ole uusi asia, vaan kehitystyötä on tehty jo pitkään.

Tampereen teknillisessä yliopistossa on jo ainakin vuodesta 2004 alkaen järjestetty ensimmäisen vuoden opiskelijoille suunnattu sähköinen, lukiotason matematiikan osaamista mittaava Perustaitotesti (Pohjolainen, Raassina, Silius, Huikkola & Turunen, 2006). Testi käyttää hyväkseen STACK-järjestelmää (System for Teaching and Assessment using a Computer Algebra Kernel) (Sangwin, 2013). Testin käytännön järjestelyt on toteutettu TTY:n Matematiikan laboratorion PC-

luokassa opettajan valvonnassa. Kynää ja paperia lukuun ottamatta muut työkalut, kuten kirjallisuus, laskimet ja muiden verkkosivujen käyttö testin aikana on kielletty.

Tehtävien tuloksia analysoitaessa kvantitatiivisesti yhdessä tehtävien vaatimien taitojen kvalitatiivisen analyysin kanssa voidaan luoda kokonaiskuvaa tekniikan alan opiskelijoiden matemaattisista kompetenseista yliopisto-opintojen alussa. Pidemmällä aikavälillä tarkasteltuna nämä tulokset kertovat opiskelijoiden taitotason muutoksista toisen asteen opetuksen kehityksen myötä. Yliopistojen matematiikan opetuksen yhdeksi keskeisimmistä haasteista on muodostunut kompetenssi puutoksiin vastaaminen, ja tähän haasteeseen on TTY:llä vastattu aiempina vuosina ohjaamalla Perustaitotestissä heikosti menestyneet oppilaat niin ikään sähköiseen, STACK-järjestelmää hyödyntävään Matematiikkajumppa-tu-kiopetusohjelmaan. Matematiikkajumpan tehtävät (71 kpl) vastaavat tasoltaan Perustaitotestin tehtäviä.

STACK-järjestelmä on todettu hyväksi työkaluksi opetuksessa (Patana, 2017; Havola, Majander, Hakula, Alestalo & Rasila, 2011; Sangwin 2013), mutta sillä on heikkoutensa. STACK tarkistaa vain opiskelijan lopullisen vastauksen ennalta valmisteltuihin kysymyksiin tai kysymyssarjoihin, mikä korostaa pelkän lopputuloksen tärkeyttä. Matemaattisen ajattelun kannalta työskentelyprosessi ja looginen päättely, joilla lopputulos on saavutettu, jäävät tällöin varjoon (Valmari & Kaarakka, 2016). Sama ongelma on havaittu TTY:n Matematiikkajumppassa, jossa suuri osa opiskelijoista ohittaa varsinaisen ajattelun hyödyntämällä jotain sähköistä ohjelmistoa (Myllykoski, Ali-Löytty, & Pohjolainen, 2016).

Tämän artikkelin tavoitteena on kuvata matemaattisen osaamisen muutoksia ja löytää ratkaisuja edellä mainittuihin haasteisiin. Lisäksi artikkelissa tarkastellaan automaattisen arvioinnin kehittämistä. Tutkimuskysymykset ovat seuraavat:

1. Miten uusien opiskelijoiden osaaminen on muuttunut matematiikan perustaidoissa vuosina 2006–2017?
2. Millaisin keinoin matemaattista ajattelua voidaan tukea sähköisissä tehtävissä?
3. Miten voidaan luokitella opiskelijoiden sähköisissä tehtävissä tekemiä virheitä automaattisen arvioinnin parantamiseksi?

Tarkastelujen pohjana käytetään sekä lukion opetussuunnitelman perusteita että Euroopan insinöörikoulutusyhdistyksen (SEFI) matematiikan opetuksen viitekehystä.

TEOREETTINEN VIITEKEHYS

Trigonometria opetussuunnitelman perusteissa

Perustaitotestissä on ollut seuraava trigonometrian tehtävä. Vastaavaa tehtävää on käytetty myös Matematiikkajumppassa.

Ratkaise seuraava trigonometrinen yhtälö:

$$\sin(2x) - 1 = 0$$

Anna yhtälön eräs ratkaisu radiaaneina (pi pienellä p:llä merkitsee π).

Suomalaisen opetussuunnitelman perusteiden (Opetushallitus, 2003) mukaan lukion kurssin *MAA9: Trigonometriset funktiot ja lukujonot* tavoitteena on, että opiskelija "oppii ratkaisemaan sellaisia trigonometrisiä yhtälöitä, jotka ovat tyyppiä $\sin f(x) = a$ tai $\sin f(x) = \sin g(x)$. Eurooppalaisessa standardissa (SEFI, 2013) Core 0 -tason kompetensseihin kuuluu "yhtälöiden $\sin(x) = c$, $\cos(x) = c$ ja $\tan(x) = c$ ratkaiseminen". Tämän lisäksi opiskelijan tulisi tällä tasolla osata käsitellä lausekkeita, jotka ovat muotoa $\sin(x+a)$ tai $a + \sin(x)$. Perustaitotestin tehtävä mittaa sekä kansallisesti että kansainvälisesti määriteltyä keskeistä osaamistavoitetta.

Yllä kuvattu trigonometrinen yhtälö on helppo ratkaista käyttämällä esimerkiksi CAS-laskinta, jolloin yllä määriteltyjen kompetenssien kehittyminen voi vaarantua opiskelijan keskittyessä pelkästään tehtävän lopputulokseen. Opiskelijan matemaattisen ajattelun kehittymisen kannalta on tärkeää saada opiskelija kuvaamaan matemaattista ajatteluaan sähköisissäkin tehtävissä, tätä ei perinteisillä sähköisillä oppimistyökaluilla välttämättä saavuteta.

Virheiden luokittelu

Ajatteluprosessit ovat yleensä näkymättömiä. Virheellisiä vastauksia analysoimalla tutkijat pyrkivät näkemään opiskelijoiden ajatteluprosesseja, eli "katsomaan opiskelijan pään sisään". (Greer & Mulhern, 1989). Opiskelijoiden tekemät virheet voidaan jakaa karkeasti systemaattisiin ja satunnaisiin. Systemaattiset virheet ovat erityisen kiinnostavia, koska ne kuvaavat ajatteluprosesseja. Satunnaisilla virheillä ei ole suurta merkitystä tutkimukselle, mutta niiden tunnistaminen ja karsiminen pois aineistosta on tärkeää muiden virheiden löytämiseksi. (Greer & Mulhern, 1989)

Virheitä voidaan luokitella eri tavoin tutkimustarkoituksen mukaan. Esimerkiksi Sangwin ja Ramsden (Sangwin & Ramsden, 2007) ovat tutkimuksessaan matematiikan tietokoneavusteisesta opiskelusta luokitelleet virheitä laskuvirheisiin (LV), virheellisiin merkintöihin (VM), ja virheelliseen päättelyyn (VP).

Greer ja Mulhern ovat etsineet kirjallisuudesta näkökulmia virheiden tutkimiseen. Erilaisia lähestymistapoja ovat esimerkiksi yksinkertainen virheiden laskeminen ja kirjaaminen, erityyppisten virheiden luokittelu, systemaattisten virheiden tunnistaminen sekä virhemallin luominen ja testaaminen "johdattelemalla" opiskelijat tekemään tietynlaisia virheitä (Greer & Mulhern, 1989).

TUTKIMUSMENETELMÄT

Perustaitotestiin osallistui vuosittain ajanjaksolla 2006–2017 noin 600–700 opiskelijaa. Perustaitotesti koostui 16 vuosittain toistuvasta tehtävästä, jotka mit-

tasivat eri matematiikan osa-alueiden osaamista. Testi pisteytettiin siten, että jokainen oikein suoritettu tehtävä antoi yhden pisteen. Testitehtävät eivät olleet julkista tietoa. Vuodesta 2010 alkaen Perustaitotestin suorituksista on kerätty myös tehtäväkohtaista dataa.

Vuonna 2017 toteutettiin STACK-ohjelmistoa käyttävän Matematiikkajumpan rinnalla MathCheck-ohjelmistoa hyödyntävä MathCheck-jumppa TIM-alustalla (TIM, 2017). Vastaaviin jumppatehtäviin voi tutustua osoitteessa <http://math.tut.fi/mcjumppa/>. TIM-järjestelmä valittiin, koska se tarjoaa mahdollisuuden kerätä opiskelijoiden vastauksista lokitietoa, jota on hyödynnetty tässä tutkimuksessa. Tutkimukseen osallistuneita ensimmäisen vuoden opiskelijoita ($N = 137$) informoitiin lokitietojen käytöstä. Lokitietoja käsiteltiin anonyymisti. Niiden avulla tutkittiin, mitkä ovat opiskelijoiden tyypilliset virhepäätelmät, ja kuinka yleisiä nämä ovat. Tarkastelussa keskitytään ainoastaan aiemmin esiteltyä Perustaitotestin trigonometrian tehtävää vastaavaan MathCheck-jumppatehtävään:

Laske yhtälön $\cos(8x) + 1 = 0$ ratkaisu radiaaneissa. Anna pienin positiivinen ratkaisu. Vinkki: milloin \cos saa arvon -1 ?

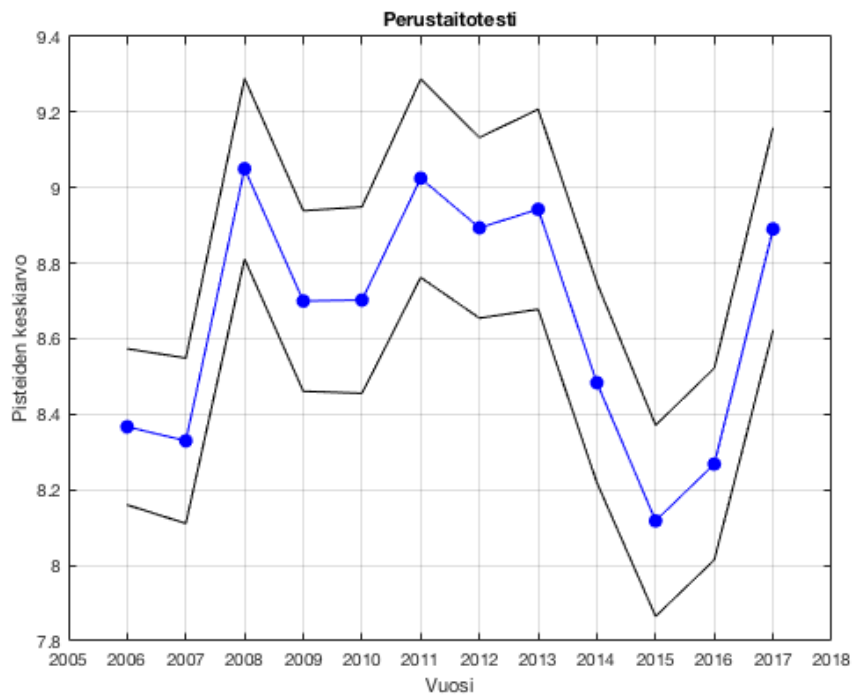
Vuosien 2006 – 2017 Perustaitotestin tuloksia analysoitiin tilastollisesti ja vuonna 2017 opiskelijoiden TIM-järjestelmään antamia vastauksia on analysoitiin sisälönanalyysin (Eskola & Suoranta, 2014) keinoin.

TULOKSET

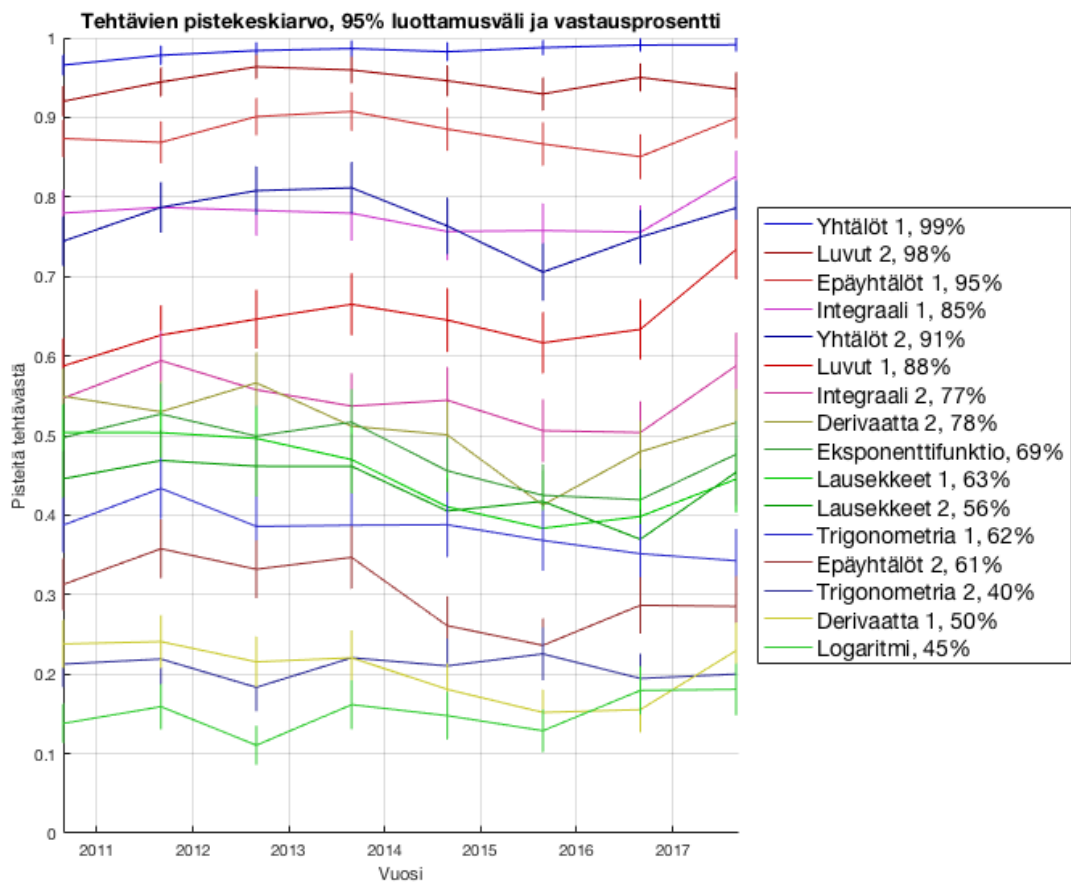
Opiskelijoiden suoriutuminen Perustaitotestissä vuosina 2006 – 2017

Kuvassa 1 on testin vuosittainen pistekeskisarvo ja keskiarvon 95%:n luottamusväli syksyille 2006 – 2017. Testin maksimipistemäärä on 16 pistettä. Kuvasta havaittava Perustaitotestin tulosten heikkeneminen vuosina 2013 – 2015 ilmeni muun muassa opiskelijoiden heikkoina perustaitoina lausekkeiden manipuloinnissa ja yksinkertaisten laskusääntöjen hallinnassa, mikä puolestaan vaikeutti uusien asioiden oppimista. TTY:n peruskurssien kompetenssivaatimuksista ei kuitenkaan voitu merkittävästi joustaa, joten ongelmaan pyrittiin vastaamaan tukiopeustoimilla.

Kuvassa 2 vasemmalla esitetään vuosittainen tehtävien pistekeskisarvo (0 – 1 pistettä kustakin tehtävästä) ja oikealla tehtävien vastausprosentti, eli kuinka moni testiä tehneistä opiskelijoista yritti tehtävää. Kukin testi on merkitty ajallisesti suoritusvuoden syksyille, ja testin kohdalla oleva pystyviiva kuvaa 95%:n luottamusväliä tehtävän pistekeskisarvolle.



Kuva 1. Perustaitotestin pistekeskisarvo ja pistekeskisarvon 95%:n luottamusväli.



Kuva 2. Perustaitotestin tehtäväkohtainen pisteanalyysi ja pistekeskisarvon 95%:n luottamusvälit.

Kuvasta 2 nähdään esimerkiksi, että ensimmäisen trigonometrian tehtävän (Trigonometria 1) aloitti 62% opiskelijoista. Tehtävän pistekeskiarvo oli suurimmillaan vuonna 2011 noin 0,42. laski siitä hieman ja oli vuonna 2017 noin 0,35.

Tehtäväkohtaisten pisteiden tarkastelu osoittaa, että tehtävien suorituksessa on vuositasolla radikaaleja eroja. Vuosien 2010 (ensimmäinen kerätty data) ja 2015 (heikoin Perustaitotesti -menestys, ks. Kuva 1) välillä havaittiin tilastollisesti merkittäviä t-testin p-arvoja tehtävissä Lausekkeet 1 (0,000), Derivaatta 1 (0,000), ja Derivaatta 2 (0,000) ja myös kuvaajan silmämääräinen tarkastelu osoittaa, että monissa tehtävissä vuodesta 2013 vuoteen 2015 on tapahtunut huomattava pistekeskiarvon lasku (2015 tulos ei ole 2013 tulosten 95%:n luottamusvälissä).

Tehtävien osaamisjärjestys on pysynyt kuitenkin yllättävän tarkkaan samana koko tarkasteltavan jakson ajan (tehtävien 95% luottamusvälit eivät pääsääntöisesti esiinny päällekkäin). Osaamistason eron lisäksi myös osa opiskelijoista, joka on aloittanut tehtävän, on "vaikeimmissa" tehtävissä huomattavasti alhaisempi kuin niissä, joissa osaaminen on parasta (40-50% vastaan >90%). Heikointa osaaminen on ollut trigonometriassa, derivoinnissa ja logaritmeissa. Näissä tehtävissä sekä pistekeskiarvo että vastausprosentti olivat molemmat tehtäväsarjan alimpia. Tämän vuoksi tässä artikkelissa on keskitytty nimenomaan trigonometrian tehtäviin.

MathCheck ajattelun esiintuomisen työkaluna

STACK-ohjelmistolla toteutetuissa Perustaitotestissä tai Matematiikkajumpassa järjestelmään syötetään ainoastaan lopputulos. Tällöin tehtävä on joko oikein tai väärin ja opettajan ei ole mahdollista selvittää, mitä opiskelija on ajatellut tehtävää tehdessään. Mikäli välivaiheet olisivat väärin ratkaistussa tehtävässä näkyvissä, ohjelman olisi mahdollista antaa opiskelijan ajattelua tukevia neuvoja ja palautetta.

Yhtenä ratkaisuehdotuksena toiseen tutkimuskysymykseemme on TTY:llä kehitetty MathCheck-kaavantarkastin, joka poikkeaa perusfilosofialtaan STACK-ohjelmasta. MathCheck ei keskity tehtävän arvioinnissa pelkkään lopputulokseen. Opiskelija voi sen sijaan kirjoittaa kaavantarkastimeen koko ratkaisunsa välivaiheineen, jolloin MathCheck tarkastaa koko päättelyketjun matemaattisen oikeellisuuden. Lisäksi opiskelija pystyy kirjoittamaan vastaukseensa kommentteina esimerkiksi muistiinpanoja, jotka eivät vaikuta tarkastukseen. (Valmari & Kaarakka, 2016)

MathCheck-työkalusta on olemassa kaksi versiota: itsenäiseen harjoitteluun tarkoitettu, sekä tenttitilanteessa käytettävä. Itsenäiseen harjoitteluun käytettävä MathCheck-tarkastin antaa opiskelijalle välittömästi ohjaavaa palautetta päättelyketjujen oikeellisuudesta, kun taas tenttitilanteissa käytettävä versio jättää välittömän palautteen antamatta. Sekä itsenäisessä harjoittelussa että tenttitilanteessa MathCheck mahdollistaa fokuksen siirtymisen takaisin matemaattiseen ajatteluun pelkkien ohjelmistojen opetteluun ja hyödyntämisen sijaan (Valmari & Kaarakka, 2016).

Välivaiheiden näkyviin kirjoittamisen ja kommentoimisen mahdollistava MathCheck tarjoaa perinteistä kynää ja paperia korvaavan työkalun muistiinpanojen tekemiseen. Useissa korkeakouluissa on käytössä sähköinen EXAM-tenttijärjestelmä, joka sopii perinteisesti vain monivalinta- ja esseetehtäville. Matematiikan tenttien tekemistä ja arviointia on erityisesti haitannut matemaattisen työskentelyn vaikeus perinteisten kirjoitusvälineiden puuttuessa (Koskinen, Kela, Ali-Löytty & Joutsenlahti, 2017). Välivaiheet ja kommentit tarjoavat opettajalle mahdollisuuden tarkastella tarkemmin, miten opiskelijat ratkaisevat tehtäviä ja millaisia virheitä he tekevät.

MathCheck-jumppatehtävän virhetarkastelu

MathCheck-jumpan trigonometrian tehtäväsarjaan saatiin huomattava määrä sekä oikeita että vääriä vastausyrityksiä, ja useimmat opiskelijat olivat harjoitelleet sarjan tehtäviä. Tehtävää teki kaikkiaan 137 opiskelijaa, siihen tehtiin yhteensä 271 yritystä ja lähes kaikki (133) saivat tehtävän lopulta oikein. Jotkut opiskelijat vastasivat oikein useamman kerran, ja kaikkiaan oikeita vastauksia tuli 150.

Yrityskertojen määrä ennen oikeaa vastausta vaihteli 1:n ja 10:n välillä. Oikeiden vastausten yritysmäärien moodi on 1 ja keskiarvo 1,42, eli suurin osa sai tehtävän ensimmäisellä yrittämällä oikein. Tehtävien yrityskertoja ei ollut rajoitettu, joten jotkut tekivät tehtävää useita kertoja ennen oikeaa vastausta, mikä nosti keskiarvoa.

Taulukossa 1 on erään opiskelijan vastaukset esimerkkitehtävään. MathCheck-kaavantarkastimen palaute opiskelijan vastauksen alla on merkitty punaisella.

Taulukko 1. Erään opiskelijan vastaus esimerkkitehtävään ja alla MathCheck-kaavantarkastimen vastaus.

Yrite	Opiskelijan vastaus
1	$\Leftrightarrow \cos(8x) = -1 \Leftrightarrow 8x = 0 + n \cdot 2 \cdot \pi \Leftrightarrow x = (n \cdot \pi) / 4 \Leftrightarrow x = \pi / 4$
MC	$\Leftrightarrow 8x = 0 + n \cdot 2 \cdot \pi$! New variables must not be introduced here
2	$\Leftrightarrow \cos(8x) = -1 \Leftrightarrow 8x = 0 + 2 \cdot \pi \Leftrightarrow x = (\pi) / 4 \Leftrightarrow x = \pi / 4$
MC	$\Leftrightarrow 8x = 0 + 2 \cdot \pi$ A teacher given root was lost here
3	$\Leftrightarrow \cos(8x) = -1 \Leftrightarrow 8x = 2 \cdot \pi \Leftrightarrow x = \pi / 4 \Leftrightarrow x = \pi / 4$
MC	$\Leftrightarrow 8x = 2 \cdot \pi$ A teacher given root was lost here
4	$\Leftrightarrow \cos(8x) = -1 \Leftrightarrow 8x = \pi \Leftrightarrow x = \pi / 8$
MC	No errors found. Please notice that the check was not complete.

Esimerkkitehtävässä nähdään, miten MathCheck on antanut opiskelijalle vihjeitä lasku- ja syntaksivirheistä. Ohjelman tarkistus pysähtyy aina ensimmäiseen virheeseen, ja opiskelija on korjannut tehtävää ohjelman antamien vihjeiden mukaan.

Ensimmäisessä yrittessä on monikertaa tarkoittava kirjain *n*. MathCheck on tullut kirjaimen yritykseksi esitellä uusi muuttuja, ja merkinnyt virheellisen kohdan huutomerkillä. Toisen yrittien keskellä on virhe. Kolmas yritys on tarkastuksen kannalta samanlainen kuin toinen. Neljännellä yrityksellä tehtävä on oikein.

Taulukossa 2 esitetään huomioita kertausohjelman ominaisuuksien käytöstä sekä väärin vastausten kokonaismäärä.

Taulukko 2. Huomioita MathCheck-kaavantarkastimen ominaisuuksien - kommenttien ja välivaiheiden - käytöstä sekä virheellisten vastausten määrä esimerkkitehtävässä.

Huomio	Lukumäärä
Oikea vastaus perusteltu välivaiheihin	65
Oikea vastaus ilman perustelua	85
Tehtävässä käytetty kommentteja	7
Väärin	121

Taulukosta 2 nähdään, että 43%:ssa opiskelijoiden oikeista vastauksista (N = 150) käytettiin välivaiheita, ja muutama opiskelija käytti myös kommentteja. Tehtävänanto ei edellyttänyt perusteluita. Pelkkä oikea vastaus riitti.

Taulukossa 3 esimerkkitehtävässä luokiteltuja virheitä. Tehtävänannossa rajattiin vastaus pienimpään positiiviseen arvoon.

Taulukko 3. Esimerkkitehtävässä luokitellut virheet.

Huomio	Lukumäärä
Oikein, mutta sisältää syntaksivirheen (VM)	25
Oikein, mutta myös muita vastauksia (VM)	22
Oikea vastaus on annettu asteina (VM)	3
Oikea vastaus löytyy ratkaisusta (LV&VM)	9
Jokin kokonaisluku kertaa oikea vastaus	26
Sievennys on jäänyt kesken (LV&VP)	20
Oikean suuntainen vastaus ilman pi:tä (VP)	6
Päätelyvirhe, opiskelijan oma teoria (VP)	10

Taulukosta 3 havaitaan, että tässä tehtävässä virheelliset vastaukset voidaan jakaa kahdeksaan luokkaan. Taulukkoon on myös merkitty, kuinka nämä jakautuisivat Sangwinin ja Ramsdenin määrittelemään kolmeen luokkaan LV, VM ja VP. Mikäli opettaja haluaisi antaa virheellisen vastauksen antaneille opiskelijoille palautetta, riittäisi noin 20 erillistä palautetta, ja jokainen virheellisen vastauksen antanut opiskelija saisi henkilökohtaisemman, heidän virheeseensä liittyvän palautteen.

YHTEENVETO JA POHDINTA

Tarkastelemalla perustaitotestin tehtäväkohtaisia tuloksia (Kuva 2) havaitaan mielenkiintoisia tuloksia. Tehtävien vaikeusjärjestyksen säilyminen samana vuodesta toiseen huomattavan suurella osallistujamäärällä (600-700 opiskelijaa vuosittain) on konkreettinen todiste siitä, että tietyt aihealueet ovat lukio-opetuksen jälkeen selvästi vaikeampia kuin toiset. Tämän lisäksi osaamisen taso ei juurikaan ole muuttunut tehtävätyyppien välillä, vaan Kuvasta 1 havaittava vuoden 2013 perustaitojen lasku näkyy tasaisena laskuna tehtävätyypeittäin Kuvassa 2, mutta aihealueiden vaikeusjärjestys pysyy samana. Vaikeimpia aihealueita ovat trigonometria, derivaatta ja logaritmit, jotka ovat erityisesti insinöörien käyttämissä jatkuvassa matematiikassa erittäin tärkeitä kompetensseja. Yleisesti on kuitenkin syytä huomauttaa, että vuoden 2015 jälkeen testin tulokset ovat kääntyneet noususuuntaan. Yksi mahdollinen syy tälle voi olla opiskelijoiden työ matematiikan ylioppilaskirjoitusten A-osaa varten, jossa laskimet on kielletty.

Mahdollisia syitä aihealueiden vaikeusasteen järjestyksen säilymiseen samana vuodesta toiseen voidaan hakea erityisesti suomalaisesta koulutuskulttuurista. Lukiotasolla opetettavat asiat opetetaan kansallisesti samalla tavalla, ja suomalainen lukiokoulutus nähdäänkin yleisesti hyvin tasa-arvoisena. TTY:lle hakeutuvien opiskelijoiden matemaattiset taidot ovat vahvoja samoissa aihealueissa. Lisäksi erot parhaiden ja keskitasoisten opiskelijoiden välillä esiintyvät vähiten painotetuissa aiheissa (trigonometrian yhtälöt, logaritmit). Yliopisto-opintojen kannalta olisi toivottavaa, että lukiomatematiikan painopistealueet keskittyisivät enemmän ymmärtämiseen kuin soveltamiseen. Ymmärtämisessä ja perustaitojen osaamisessa on paljon kurottavaa, jotta päästään yliopisto-opintojen vaatimalle tasolle. Tätä kuromista varten (tuki)opetustyökalujen, kuten MathCheck, kehittäminen on tärkeää ja hedelmällistä.

Tutkimuksessa esitettyjen tulosten perusteella MathCheck-kaavantarkastinta voidaan hyödyntää sekä alkuperäisessä tarkoituksessaan yksittäisen opiskelijan automaattisessa ohjaamisessa, että matemaattisen ajattelun edistäjänä sähköisissä tehtävissä. Sopivalla alustalla toteutettuna se voi toimia myös osana automaattisen arvioinnin järjestelmää. Täten MathCheck on opettajalle hyödyllinen työkalu opiskelijoiden matemaattisen ajattelun kehittämiseen sähköisissä tehtävissä. Tulevaisuudessa MathCheck voi mahdollistaa myös tarkoituksenmukaisemman ja kustannustehokkaamman automaattisen arvioinnin ohjelmiston kehitystyön jatkuessa.

Sähköisten tehtävien automaattinen tarkastaminen vaatii vielä kehitystyötä. Tärkeä osa tätä kehitystä on virheluokittelu, jonka mahdollisuuksista saatiin tässä tutkimuksessa rohkaisevia tuloksia. Tulkitsemalla Taulukon 3 eri virhetyyppejä, voidaan todeta suurimman osan virheellisistä vastauksista olevan ainakin osittain oikein, minkä lisäksi vastaukset voidaan lajitella siten, että edellä mainittu automaattinen arviointi mahdollistuu. Tässä artikkelissa esitetyssä esimerkkit tehtävässä opettajan tarvitsisi antaa ohjelmistolle noin 20 erillistä valmiiksi kirjoitettua palautetta, mikä mahdollistaisi huomattavasti paremman ja syvällisemmän

palautteen antamisen perinteiseen oikein/väärin -ilmoitukseen verrattuna. Automaattinen tarkastus ei voi vielä täysin poistaa opettajan tarvetta tarkastella joi-tain vastauksia yksittäin. Tästä huolimatta automaattinen tarkastus vähentäisi opettajan työmäärää, vaikka opiskelijamäärä kasvaisikin merkittävästi. Seuraa-vana tavoitteena onkin kehittää ohjelmisto, joka pysty luokittelemaan nämä vir-heelliset vastaukset automaattisesti ja antamaan palautteen virheluokkien mu-kaisesti.

LÄHTEET

- Eskola, J., & Suoranta, J. (2014). *Johdatus laadulliseen tutkimukseen*. Tampere, Vas-tapaino.
- Greer, G. B., & Mulhern, G. (1989). Between the Ears: Making Inferences about Internal Processes. Teoksessa G. B., Greer & G. Mulhern (toim.), *New Directions in Mathematics Education* (s. 29-62). Lontoo, Iso Britannia: Routledge.
- Havola, L., Majander, H., Hakula, H. Alestalo, P., & Rasila, A. (2011). Aktivoiviin opetusmenetelmiin perustuvat matematiikan opetuskokeilut Aalto-yliopis-tossa. *Tuovi 9: Interaktiivinen tekniikka koulutuksessa 2011-konferenssin tutkijata-paamisen artikkelit*, 5.
- Koskinen, S., Kela, J., Ali-Löyty, S., & Joutsenlahti, J. (2017). Sähköisen matema-tiikan tentin toteuttaminen ja opiskelijoiden kokemukset sähköisestä tentistä. Teoksessa *Proceedings of the FMSERA Annual Symposium*, 110-120. Saatavilla <https://journal.fi/fmsera/article/view/60927>.
- Myllykoski, T. (2016). Educational Videos and the Use of Tools in Mathematics Remedial Instruction. Diplomityö, Tampereen teknillinen yliopisto.
- Myllykoski, T. (2016). Students' Use of Learning Tools and Tool Types: Solving Self-Study Assignments on an Online Platform. *SEFI 2016 Annual Conference Proceedings*. European Society for Engineering Education SEFI.
- Opetushallitus (2003). *Lukiokoulutuksen opetussuunnitelman perusteet 2003*. Saata-villa http://www.oph.fi/download/47345_lukion_opetussuunnitelman_pe-rusteet_2003.pdf.
- Patana, S. (2017). Stack-tehtävien käyttö yliopiston matematiikan kurssilla. ProGradu, Helsingin yliopisto.
- Pohjolainen, S., Ala-Rantala, M., Nykänen, O., & Ruokamo, H. (1999). On the de-sign and evaluation of an open learning environment. *International Journal of Continuing Engineering Education and Life Long Learning* (Vol. 9, Issue 3-4).
- Pohjolainen, S., Raassina, H., Silius, K., Huikkola, M., & Turunen, E. (2006). TTY:n insinöörimatematiikan opiskelijoiden asenteet, taidot ja opetuksen kehittämi-nen. *Tutkimusraportti*. Tampere: Tampereen teknillinen yliopisto.
- Sangwin, C. (2013). *Computer Aided Assessment of Mathematics*. Oxford, Iso-Britan-nia: Oxford University Press.

SEFI (2013). A Framework for Mathematics Curricula in Engineering Education. *A Report of the Mathematics Working Group*. Bryssel, Belgia: European Society for Engineering Education.

Jyväskylän Yliopisto (2017). TIM (The Interactive Material, vuorovaikutteinen materiaali) [Tietokoneohjelma]. Saatavilla <https://tim.jyu.fi/view/tut/courses/math/jumppa>.

Valmari, A., & Kaarakka, T. (2016). MathCheck: A tool for checking math solutions in detail. Teoksessa *44th SEFI Conference, Engineering Education on Top of the World: Industry University Cooperation* (pp. 12-15). Tampere, Suomi: SEFI.