



## Katsaus Beidou-satelliittijärjestelmään ja sen kellojen estimointiin

### Citation

Rautalin, S. (2014, syys). Katsaus Beidou-satelliittijärjestelmään ja sen kellojen estimointiin.

### Year

2014

### Version

Other version

### Link to publication

TUTCRIS Portal (<http://www.tut.fi/tutcris>)

### Take down policy

If you believe that this document breaches copyright, please contact [cris.tau@tuni.fi](mailto:cris.tau@tuni.fi), and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

MAT-67500 - Matematiikan projektityö  
Katsaus Beidou-satelliittijärjestelmään ja sen  
kellojen estimointiin

Sakari Rautalin

11. syyskuuta 2014

## English summary of the main points of this document

In this document, we describe how we can estimate and predict the clocks of the Beidou-system. Beidou is a Chinese satellite navigation and positioning system. We take an overview of the Beidou-system, and present how its clocks work. The description of the clocks and the models we use to estimate and predict them is written on Chapter 2.

In the estimations, we use standard Kalman filter and robust Kalman filter, which takes into account the single measurement errors, also known as outliers. The algorithms of the filters are presented in Chapter 3. The parameters for this case were estimated and they are presented in Chapter 4.

In the Beidou-system there are also lots of leaps, which mean sudden changes in the clock offset. Leaps are a problem especially in the clocks of the geostationary satellites. These leaps make the precise prediction of the clocks very difficult. The number of leaps for each satellite can individually be seen from Figure 4 in Section 4.3 of this document.

The satellite clock signal consists of three coefficients:  $a_0$ , which is the clock offset,  $a_1$ , which is the clock drift and  $a_2$ , which is the clock acceleration. Filtering was done for these coefficients, state consisting of all coefficients and measurement consisting of only  $a_0$ .

First, filters got data samples for ten days. One sample per day was filtered and distributions were estimated. After the ten-day filtering, the mean values of  $a_0$  and  $a_1$  were used to do a linear prediction of the clock. Prediction using the coefficient  $a_2$  was also done, but the results were significantly worse. Linear prediction for both filters gave better results.

The precision of the prediction was estimated for five, ten and fifteen days. Prediction periods that included leaps were excluded, since the prediction doesn't have any value at these kinds of periods. When we removed these periods and analyzed the rest, it turned out that filters do give more precise prediction than the coefficients of the signal alone. This can be seen from Figure 3 in Section 4.2 of this document.

However, when considering applying the results to positioning, these results are not very promising. If we consider critical error to be about a hundred meters for the prediction to be of any use, only the predictions of length less than one week can be considered useful. For longer predictions, the error very rapidly grows to be hundreds of meters.

We also tried a different model. In this model, we did the standard filtering as above, but we also included the clock acceleration -coefficient. This coefficient was acquired from polynomial regression to the data that was received during the ten-day -period. So we did the second-order polynomial for the prediction and acquired the coefficients from multiple sources.

With this method, we got considerably better results. Error was dropped to about one fifth compared with the original prediction from the satellite. This means that in the 15-day prediction, 90% of the data was less than 350 meters. This is still much worse than that of the GPS-system, but it is a significant improvement to the old result.

The accuracy of this model is so much better, that we should consider applying it to clock prediction. On the downside, this model requires a lot of data. In order to create reliable second-order polynomial regression, we require a lot of data points, whereas when using only filters, not so many points are necessary. Anyhow, this method is a significant improvement to the prediction using only the standard Kalman filter.

To improve the accuracy of the prediction, different methods and models must be applied. The biggest single problem in the clock prediction is the large number of leaps in the system. In the GPS-system, satellites had only one or zero leaps during the year-long period, whereas in the Beidou-system one satellite can have dozens of leaps. This makes reliable predicting very difficult.

# Sisältö

<b>1</b>	<b>Johdatus Beidou-satelliittijärjestelmään</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Beidou-satelliittien kellot</b>	<b>2</b>
2.1	Kellotulkinta . . . . .	2
2.2	Kellomalli . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Kellojen ennustaminen</b>	<b>4</b>
3.1	Suodatus . . . . .	4
3.1.1	Kalmanin suodatin . . . . .	4
3.1.2	Robusti Kalmanin suodatin . . . . .	5
3.2	Suodatuksen soveltaminen Beidou-järjestelmään . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Tuloksia</b>	<b>7</b>
4.1	Parametrien valinta . . . . .	7
4.2	Ennustuksen tulokset . . . . .	8
4.3	Hypyt ja ulkolaiset . . . . .	12
4.4	Kellojen virheet . . . . .	14
4.5	Mallin parametrien valinnasta . . . . .	16
4.6	Vaihtoehtoinen malli . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Yhteenveto</b>	<b>21</b>

# 1 Johdatus Beidou-satelliittijärjestelmään

Satelliittipaikannuksessa yhdysvaltaisten kehittämä GPS-järjestelmä on ollut laajin ja käyttökelpoisin järjestelmä sen jälkeen kun sen toiminta aloitettiin 1990-luvulla. Kuitenkin kilpailevia järjestelmiä on kehitetty ja 2000-luvulla venäläiset, eurooppalaiset, kiinalaiset ja japanilaiset ovat kehittäneet omia järjestelmiään kilpailemaan ja toimimaan yhteistyössä GPS-järjestelmän kanssa.

Beidou-järjestelmä on kiinalaisten kehittämä satelliittipaikannusjärjestelmä. Beidou koostuu kahdesta eri järjestelmästä: kokeellinen vain Kiinassa toimiva Beidou-1 ja laajempi Beidou-2 (tunnetaan myös nimellä COMPASS-järjestelmä), jota tämä työ käsittelee. Tämä järjestelmä on jo täydessä toiminnassa Kiinan ja Tyynen Valtameren alueilla ja vuoteen 2020 mennessä sen on tarkoitus toimia maailmanlaajuisesti samalla tavalla kuin GPS-järjestelmä nykyään.

Beidou-järjestelmä sisältää kolmea eri satelliittityyppiä. Geostationääriset satelliitit (GEO), jotka kiertävät Maata samalla nopeudella kuin Maa pyörii päiväntasaajan yläpuolella. Nämä pysyvät siis joka hetkellä saman paikan yläpuolella Maasta katsottuna. Kaltevalla geosynkronoidulla kiertoradalla (IGSO) olevat satelliitit kiertävät Maata hieman kaltevalla radalla, mutta kuitenkin samalla nopeudella kuin Maan pyörimisliike. Nämä satelliitit pysyvät suunnilleen samalla pituuspiirillä oskilloiden pohjoisen ja eteläisen pallonpuoliskon välillä. Kolmas tyyppi on ns. MEO-rata (Medium Earth Orbit), jotka ovat lähempänä Maata kuin GEO-satelliitit ja siten kiertävät Maata nopeammin. Lähteen [1] mukaan näiden satelliittien kiertoaika on hieman yli 12 tuntia.

Valmistuttuaan Beidoun on suunniteltu sisältävän 35 satelliittia; viisi geostationääristä ja 30 muuta satelliittia. Tämän työn kirjoittamishetkellä (heinäkuu 2014) on laukaistu kuusi GEO-satelliittia, sekä viisi MEO- ja IGSO-satelliittia. Yksi GEO-satelliitti kuitenkin lakkasi lähettämästä signaalia ja yksi MEO-satelliitti lakkautettiin kellovian vuoksi. Toiminnassa olevien luvut ovat siis viisi GEO-satelliittia, viisi IGSO-satelliittia ja neljä MEO-satelliittia. Nämä 14 satelliittia ovat kuitenkin jo täydessä toiminnassa ja niitä voi käyttää paikannukseen. GEO- ja MEO-satelliitit on sijoitettu siten, että ne ovat Itä-Aasiassa; suurin osa näistä on Kiinan yläpuolella. Satelliittien sijainnin vuoksi paikannus siis toimii tällä hetkellä parhaiten Aasiassa ja Tyynen Valtameren alueilla. Kuitenkin kun lisää MEO-satelliitteja saadaan toimintaan, satelliittipaikannuksen pitäisi toimia täysin myös maailmanlaajuisesti.

## 2 Beidou-satelliittien kellot

Beidou-järjestelmän satelliittien kellot käyvät BDT-aikaa. BDT-aika on jatkuva aikajärjestelmä, jossa aikayksikkö on SI-sekunti. BDT-ajan alkuhetki oli 1.1.2006 kello 00:00:00 UTC-aikaa. BDT-aika on siis täysin analoginen GPS-ajan kanssa, lukuun ottamatta karkaussekunteja, joita järjestelmissä on eri määrä. GPS-aika on BDT-aikaa 14 sekuntia edellä, muuten järjestelmät ovat täysin samat. Lisää tietoa aikajärjestelmästä, niiden välisistä yhteksistä ja käytöstä satelliittien toiminnassa löytyy lähteestä [2].

### 2.1 Kellotulkinta

Satelliitista saapunut signaali (tunnetaan myös nimellä broadcast-efemeridi) sisältää paljon tietoa kelloista. Satelliitin signaali sisältää luonnollisesti lähetysajan ja siis satelliitin kellonajan, ja sitä kautta satelliitin signaalin kulkeman matkan pituus voidaan tietysti laskea.

Kellot eivät kuitenkaan ole täydellisiä, joten poikkeamaa BDT-ajasta tapahtuu. Tämä johtaa siihen, että satelliitin kello ei ole täsmälleen BDT-ajassa ja tämä on otettava huomioon laskuissa ja ennustuksissa.

Kellot toimivat laskemalla jonkin säännöllisesti tapahtuvan ilmiön lukumääriä. Beidou-järjestelmän kellot ovat lähteen [1] mukaan rubidium-atomikelloja, joissa lasketaan aikaa rubidiumatomojen käyttäytymisen perusteella.

Tämä ei kuitenkaan toimi täydellisesti, ja kellon jaksollinen tapahtuma sisältääkin vakiovaihe-eron sekä taajuuspoikkeaman oikeasta ajasta. Vakiovaihe-ero aiheuttaa poikkeaman todellisesta kellosta ja taajuuspoikkeama kertoo lineaarisen kasvun tulevaisuudessa. Näitä kuvataan kertoimilla  $a_0$  ja  $a_1$ , jotka sisältyvät satelliitin signaaliin. Lisäksi signaali sisältää termin  $a_2$ , joka kuvaa kellopoikkeaman kiihtyvyyttä.

Näiden termien kautta kellopoikkeamaa  $\delta t_{\text{lähetyks}}$  todellisesta ajasta hetkellä  $t$  voidaan tulkita lausekkeen

$$\delta t_{\text{lähetyks}} = a_0 + a_1 * (t - t_{\text{lähetyks}}) + a_2 * (t - t_{\text{lähetyks}})^2 \quad (1)$$

avulla toisen asteen polynomina. Tässä  $t_{\text{lähetyks}}$  on lähetyksen kellonaika ja kertoimet  $a_0$ ,  $a_1$  ja  $a_2$  ovat toisen asteen polynomin kertoimet, jotka sisältyvät satelliitin lähettämään signaaliin. Näillä kertoimilla voidaan siis muodostaa ennustepolynomi, joka ennustaa kellopoikkeamaa tulevaisuudessa. Kerroin  $a_2$  on useimmiten 0, mutta toisinaan sillä tehdään korjaus satelliitin kelloon ja se poikkeaa hieman nollasta.

Todellisuudessa kellopoikkeamaan vaikuttaa vielä muutkin tekijät; esimerkiksi ilmakehän vaikutus ja suhteellisuusteoreettiset korjaukset tulisi ottaa huomioon. Nämä vaikutukset ovat kuitenkin niin pieniä, että ne jätetään tässä työssä huomioimatta.

## 2.2 Kellomalli

Jotta kelloja voitaisiin ennustaa, on niiden käyttäytymiselle laadittava malli. Tässä työssä malli rakennetaan samalla tavalla kuin lähteessä [3]. Perusteluja malleille ei sen syvemmin tässä työssä esitetä ja lukija voikin näitä perusteluja lukea edellä mainitusta lähteestä.

Satelliittien kellojen kellopoikkeamaa mallinnetaan seuraavalla aikadiskretisoidulla yhtälöllä

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \\ 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k, \quad (2)$$

missä  $\mathbf{x}_k$  sekä  $\mathbf{x}_{k+1}$  ovat satelliitin kellojen tiloja  $k$ :n ja  $k+1$ :n aika-askeleen jälkeen,  $\Delta t$  on näiden tilojen välillä kulunut aika ja  $\mathbf{w}_k$  on tilamalliin liittyvä prosessikohina. Tässä työssä tilavektori  $\mathbf{x}$  koostuu yhtälössä (1) esitetystä kertoimista  $a_0$ ,  $a_1$  ja  $a_2$ .

Satelliitin täsmällinen tila ei luonnollisesti päädy samanlaisena mittauslaitteeseen vaan myös mittaus sisältää virheen. Varsinaisena mittauksena pidetään ainoastaan kerrointa  $a_0$ , joka siis kertoo kellopoikkeaman kullakin ajanhetkellä. Tällöin mittausmalli voidaan kirjoittaa yhtälönä

$$\mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \quad (3)$$

missä  $\mathbf{y}_k$  on mittaus tilasta  $\mathbf{x}_k$  ja  $\mathbf{v}_k$  on mittauksessa olevaa kohinaa kuvaava termi.

Tässä työssä virhetermejä  $\mathbf{w}_k$  ja  $\mathbf{v}_k$  kuvataan nollakeskeisinä virheinä. Kalmanin suodattimen yhteydessä käytetään normaalisti jakautunutta virhettä ja robustin Kalmanin suodattimen yhteydessä Studentin t-jakauman mukaisesti jakautunutta virhettä. Näistä lisää kerrotaan seuraavassa kappaleessa.



## 3 Kellojen ennustaminen

### 3.1 Suodatus

Kelloista saadun tiedon vastaanottaminen on ns. suodatusongelma, jossa siis vastaanotetaan mahdollisesti epäsuoraa ja kohinaista dataa. Tämä data on mittaus, joka ei siis ole suoraan kellon tila, vaan tila itsessään on satunnaisprosessi, joka siis myös sisältää vastaavaa kohinaa. Tavoitteena on tällöin määrittää kellon tilan, eli satunnaismuuttujan  $x_k$  tiheysfunktio mittausten  $y_1, y_2, \dots, y_k$  perusteella. Mittausten ja tilojen mallit on esitetty edellisessä kappaleessa.

Tavallisesti suodatuksessa on kaksi vaihetta. Ensimmäisessä vaiheessa ennustetaan tila  $x_k$  perustuen mittauksiin  $y_1, y_2, \dots, y_{k-1}$ . Ei siis ole vastaanotettu vielä mittausta, joka kertoisi tilasta  $x_k$ , vaan sitä edeltävien mittausten perusteella tehdään ennuste. Tätä jakauman ennustetta kutsutaan priorijakaumaksi. Kun mittaus  $y_k$  vastaanotetaan, priorijakaumaa päivitetään saapuneen mittauksen perusteella. Tätä päivitettyä jakaumaa kutsutaan puolestaan posteriorijakaumaksi.

Tässä työssä ennustamiseen käytetään kahta eri suodatinta, Kalmanin suodatinta ja robustia Kalmanin suodatinta.

#### 3.1.1 Kalmanin suodatin

Jos tilan dynamiikka ja mittausmalli ovat lineaarisia ja normaalisti jakautuneita, suodatusongelmalle on olemassa analyttinen ratkaisu, ns. Kalmanin suodatin (KF). Kalmanin suodattimen oletus on, että tilan ja mittauksen virheet noudattavat nollakeskistä normaalijakaumaa. Tämän perusteella muodostetaan priori- ja posteriorijakaumille normaalijakautuneet tiheysfunktiot, joille siis lasketaan odotusarvo ja varianssi.

Kalmanin suodatin:

*Jos tilan dynamiikka- ja mittausmallin jakaumat voidaan esittää muodossa*

$$\begin{aligned} p(x_k|x_{k-1}) &= p_N(x_k; Ax_{k-1}, Q) \\ p(y_k|x_k) &= p_N(y_k; Hx_k, R), \end{aligned}$$

*ja alkutilan  $\mathbf{x}_0$  priorijakauma on normaalisti jakautunut odotusarvolla  $m_0$  ja kovarianssimatriisilla  $P_0$ , niin suodatus voidaan silloin kirjoittaa muodossa:*

*Tilan  $\mathbf{x}_k$  priorijakaumalle pätee  $\mathbf{x}_k|(y_1, y_2, \dots, y_{k-1}) \sim p_N(m_k^-, P_k^-)$ , missä*

$$\begin{aligned} m_k^- &= Am_{k-1} \\ P_k^- &= AP_kA^T + Q. \end{aligned}$$

Tilan  $\mathbf{x}_k$  posteriorijakaumalle pätee  $\mathbf{x}_k | (y_1, y_2, \dots, y_k) \sim p_N(m_k, P_k)$ , missä

$$\begin{aligned} m_k &= m_k^- + Kv \\ P_k &= P_k^- - KSK^T, \end{aligned}$$

ja matriisit  $K$  ja  $S$  sekä vektori  $v$  määritellään

$$\begin{aligned} v &= y_k - Hm_k^- \\ S &= HP_k^-H^T + R \\ K &= P_k^-H^TS^{-1}. \end{aligned}$$

### 3.1.2 Robusti Kalmanin suodatin

Satelliittimittauksissa esiintyy satunnaisesti yksittäisiä suuria mittausvirheitä, ns. ulkolaisia. Tällöin normaalijakauma kuvaa mittausjakaumaa virheellisesti, ja täsmällisempi malli on tarpeellinen. Tällöin voidaan käyttää mittausjakaumassa normaalijakauman sijaan Studentin t-jakaumaa, joka laskee suuret poikkeamat odotusarvosta todennäköisemmiksi. Tilan dynamiikka pidetään kuitenkin samanlaisena eli normaalisti jakautuneena. Molemmat jakautumat ovat edelleen nollakeskisiä. Tällöin kyseessä on robusti Kalmanin suodatin (RKF).

Robusti Kalmanin suodatin:

*Jos tilan dynamiikka- ja mittausmallin jakaumat voidaan esittää muodossa*

$$\begin{aligned} p(x_k | x_{k-1}) &= p_N(x_k; Ax_{k-1}, Q) \\ p(y_k | x_k) &= p_t(y_k; Hx_k, R, \nu), \end{aligned}$$

missä  $\nu$  kuvaa nyt muiden parametrien lisäksi jakauman muotoa. Mittausten oletetaan olevan  $d$ -ulotteisia ja alkutilan  $\mathbf{x}_0$  priorijakauma on normaalisti jakautunut odotusarvolla  $m_0$  ja kovarianssimatriisilla  $P_0$ . Suodatus voidaan nyt kirjoittaa muodossa:

Tilan  $\mathbf{x}_k$  priorijakaumalle pätee  $\mathbf{x}_k | (y_1, y_2, \dots, y_{k-1}) \sim p_N(m_k^-, P_k^-)$ , missä

$$\begin{aligned} m_k^- &= Am_{k-1} \\ P_k^- &= AP_kA^T + Q. \end{aligned}$$

Alkuarvaus muuttujalle  $E=1$ .

Tilan  $\mathbf{x}_k$  posteriorijakaumalle pätee  $\mathbf{x}_k | (y_1, y_2, \dots, y_k) \sim p_N(m_k, P_k)$ , missä on suoritettu algoritmi

$$\begin{aligned} S &= \mathbf{H}P_k^- \mathbf{H}^T + \mathbf{E}^{-1} \mathbf{R} \\ K &= P_k^- \mathbf{H}^T S^{-1} \\ m_k &= m_k^- + K(y_k - \mathbf{H}m_k^-) \\ P_k &= P_k^- - K \mathbf{H} P_k^- \\ E &= \frac{d + \nu}{\left( (y_k - \mathbf{H}m_k)^T \mathbf{R}^{-1} (y_k - \mathbf{H}m_k) + \text{tr}(\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} P_k^-) \right) + \nu} \end{aligned}$$

niin monta kertaa, että iteraatio on supennut.

Edellä mainitussa iteraation suppenemisessä voidaan käyttää monia eri kriteerejä. Yleensä kyseinen iteraatio suppenee varsin nopeasti eikä siis montaa iteraatiokierrosta tarvita. Tässä työssä käytetään neljää iteraatiota. Huomattaavaa on myös että alkuarvauksella  $E = 1$  ensimmäinen iteraatio vastaa täysin Kalmanin suodatinta. Myös mikäli parametri  $\nu$  on suuri, iterointi pitää muuttujan  $E$  lähellä lukua yksi, ja tällöin suodatin vastaa siis Kalmanin suodatinta.

### 3.2 Suodatuksen soveltaminen Beidou-järjestelmään

Edellä kuvattuja suodattimia voidaan käyttää ennustamaan kellojen käyttäytymistä. Kun suodatetaan tarpeeksi dataa satelliitilta saatua dataa voidaan muodostaa vastaavat toisen asteen polynomien kertoimet  $a_0$ ,  $a_1$  ja  $a_2$  kuin yhtälössä (1). Nämä kertoimet tulevat todennäköisesti ennustamaan satelliittien kelloja paremmin kuin satelliitista saadut kertoimet, sillä niissä on otettu huomioon kellojen pidempiaikainen käyttäytyminen.

Robustin Kalmanin suodattimen yhteydessä kuvattiin satelliittien kelloissa esiintyviä ulkolaisia. Näiden lisäksi kellojen epätarkkuuteen vaikuttavat ns. hyppy eli äkkinäiset ennustamattomat poikkeamat kelloissa. Näitä hyppyjä tässä työssä käsitellyt suodattimet eivät huomioi, ja tällaisten suodattimien soveltaminen (esimerkiksi Gaussin mikstuuri-suodatin, ks. lähde [3]) Beidou-järjestelmään jätetään jatkotutkimukseksi.

## 4 Tuloksia

Tuloksista osoittautui, että suodattimilla saatiin aikaan parempia ennustuksia kuin pelkällä broadcast-efemeridin sisältämällä ennustuksella. Kuitenkin ennustusten tarkkuus verrattuna esimerkiksi GPS-järjestelmään osoittautui huomattavasti huonommaksi.

Myös muut tekijät osoittivat Beidou-järjestelmän kellojen laadun huonommaksi kuin GPS-järjestelmän. Näitä olivat muun muassa poikkeamien lukumäärä ja vertailu tarkkoihin arvoihin, joita käsitellään tässä kappaleessa.

Ennustukset ja analyysit suoritettiin kymmenelle satelliitille. Nämä satelliitit olivat numerot 1-10. Satelliittien 1-14 dataa oli vain vähän saatavilla, ja lisäksi data oli niin katkonaista, että luotettavaa analyysiä olisi ollut vaikea tehdä.

### 4.1 Parametrien valinta

Suodattimille oli tietysti määritettävä parametrit ennen ennustamista. Kappaleissa 2 ja 3 näistä käsiteltiin jo osa, ja tässä kappaleessa määritetään loput.

Yhtälöissä 2 ja 3 määriteltiin tilansiirtomatriisi A ja mittaussmatriisi H seuraavasti:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \\ 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mittauksia vastaanotettiin vuorokauden välein, eli  $\Delta t = 86400s$ .

Jakaumia varten on vielä määritettävä kovarianssimatriisit sekä robustin Kalmanin suodattimen parametri  $\nu$ .

Prosessikohinan kovarianssimatriisille Q kokeiltiin monia eri arvoja. Kellojen säännöllisyyttä tutkittiin ja parametrit määritettiin sen mukaan. Kappaleessa 4.2 kuvatut tulokset suoritettiin kovarianssimatriisilla

$$Q = \begin{bmatrix} 10^{-12}s^2 & 0\frac{s^2}{s} & 0\frac{s^2}{s^2} \\ 0\frac{s^2}{s^2} & 10^{-25}\left(\frac{s}{s}\right)^2 & 0\frac{s^2}{s^3} \\ 0\frac{s^2}{s^2} & 0\frac{s^2}{s^3} & 10^{-30}\left(\frac{s}{s^2}\right)^2 \end{bmatrix}.$$

Tällä kovarianssimatriisilla saatiin parhaat ennustustulokset.

Jäljelle jäivät vielä parametrit R ja  $\nu$ . Koska mittausmalli sisälsi vain kertoimen  $a_0$ , on mittausmalli yksiulotteinen ja siten parametri R on skalaari. Näille kahdelle parametrille käytettiin seuraavia arvoja:

$$R = 10^{-10} \quad \text{ja} \quad \nu = 4.$$

Malli sisältää vielä kaksi parametria  $m_0$  ja  $P_0$ , jotka kuvaavat alkutilaa, josta suodatus aloitetaan. Suodattimien käyttö aloitettiin aina vasta toisesta ennustus-päivästä lähtien. Tällä tavalla ensimmäisen päivän tietoja oli mahdollista käyttää alkutilan  $\mathbf{x}_0$  odotusarvona. Alkutilan kovarianssimatriisiksi asetettiin

$$P_0 = \begin{bmatrix} 10^{-10} s^2 & 0 \frac{s^2}{s} & 0 \frac{s^2}{s^2} \\ 0 \frac{s^2}{s} & 10^{-20} \left(\frac{s}{s}\right)^2 & 0 \frac{s^2}{s^3} \\ 0 \frac{s^2}{s^2} & 0 \frac{s^2}{s^3} & 10^{-30} \left(\frac{s}{s^2}\right)^2 \end{bmatrix}.$$

## 4.2 Ennustuksen tulokset

Dataa vastaanotettiin satelliitista 10 päivän ajan. Jokaiselta päivästä vastaanotettiin datanäyte samaan kellonaikaan. Tämän jälkeen suodatuksesta saaduilla arvoilla sekä satelliitin antamilla arvoilla ennustettiin satelliitin kelloa 15 päivän ajan. Tätä ennustusta verrattiin vastaavaan satelliitin signaalin kyseisellä ajanhetkellä antamaan kellonaikaan. Ennustuksen tarkkuutta tarkasteltiin viiden, kymmenen ja viidentoista päivän kohdalla ennustuksen aloittamisesta.

Suodatus suoritettiin molemmilla esitetyillä suodattimilla. Ennustuksessa käytettiin kuutta eri menetelmää: molempia suodattimia, satelliitin tietoja, ja kustakin näistä käytettiin sekä ensimmäisen, että toisen asteen polynomisovitetta.

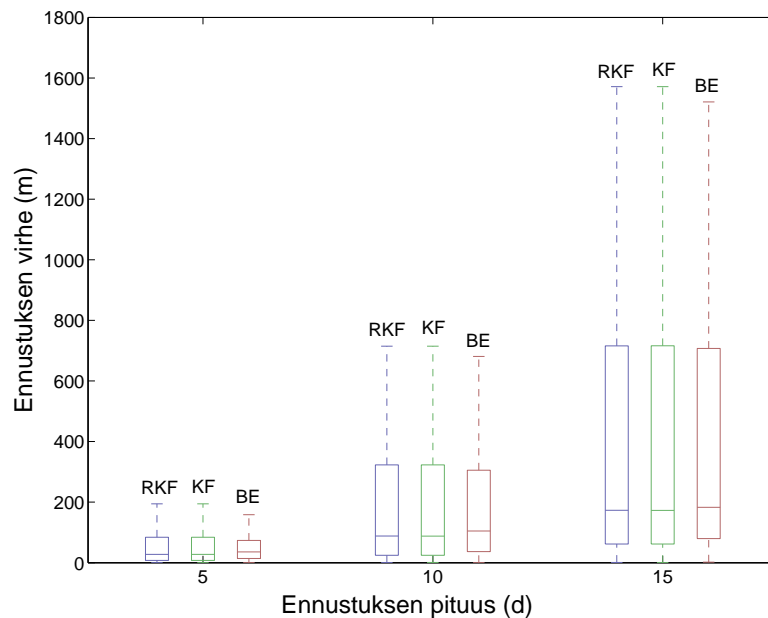
Tässä työssä käytettiin dataa Beidou-satelliiteilta 1-10. Satelliittien 11-14 dataa ei ollut yhtä paljoa saatavilla ja saatu data oli suurimmaksi osaksi katkonaista. Tämän vuoksi käytettiin vain näitä kymmentä satelliittia, joille dataa oli saatavilla suurimmaksi osaksi ajasta.

Ennustusta tehtiin GPS-viikoilla 1729-1773. Ennustuksen aloituspäivämäärät olivat kahden viikon välein. Kaikkiaan saatiin 209 ennustustulosta. Näistä 27 kar-sittiin heti pois sillä näissä ennustusajanjaksoissa joko 5, 10 tai 15 päivän kohdalla ei ollut signaalia saatavilla. Lisäksi moni ennustusajanjakso sisälsi hypyn, jolloin tarkan ennustuksen tekeminen ei ole mahdollista, eikä näiden ennustustarkkuutta ole siis mielekästä tutkia. Tällaisia ennustusajanjaksoja oli yhteensä 43.

Monen suodatusajanjakson loppupuoli sisälsi hyppyjä, joita suodattimet eivät huomioi halutulla tavalla, eivätkä siten pysty antamaan tarkkaa ennustusta. Nämä jaksot voisi ottaa analysoitavaksi käyttämällä suodatinta, joka huomioi hypyt. Tässä työssä kuitenkin nämäkin ennustukset jätettiin huomioimatta. Näitä jaksoja oli yhteensä 15, joka vastaa n. 8% kaikesta datasta.

Analysoitavaksi jäljelle jäi siis 124 ennustusajanjaksoa kymmeneltä eri satelliitilta. Nämä ajanjaksot olivat siis sellaisia, että niissä kello käyttäytyi hyvin sekä suodatus- että ennustusajanjakson aikana. Näissä vertailtiin suodattimien ja satelliitin antaman ennustuksen eroja.

Osoittautui, että kaikille lineaarinen ennuste oli tarkempi kuin toisen asteen polynomiennuste. Tämä johtunee siitä, että vaikka toisen asteen termin kerroin on pieni, se silti yliarvioi kellopoikkeaman kiihtyvyyttä etenkin pitkällä aikavälillä. Tämä nimittäin on useimmiten käytännössä nolla. Tämä lisäksi korostuu, kun suodatin käytännössä ei huomioi kellon pidempiaikaista käyttäytymistä, vain viimeisimmät mittaukset. Toisen asteen termin suuruus yliarvioituu ja tämän vuoksi lineaarinen ennuste toimii paremmin.

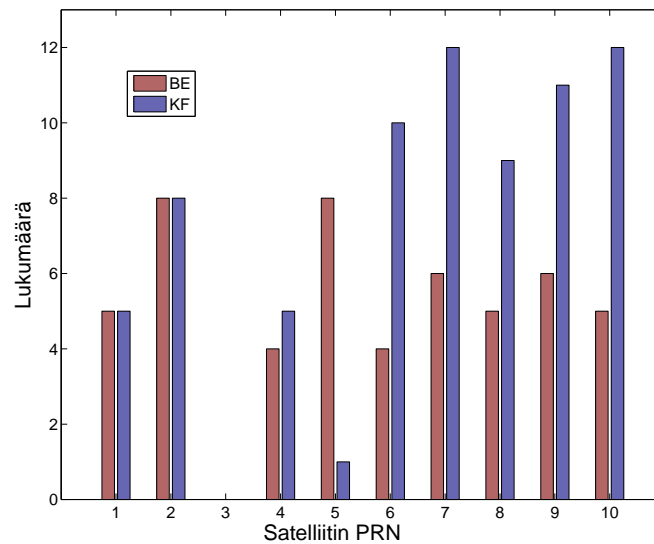


Kuva 1: Ennustuksessa tapahtuva virhe. Kelloille tehtiin 5, 10 ja 15 päivän ennustukset ja tuloksia vertailtiin eri suodattimien kesken. Viikset vastaavat 10% ja 90% datasta, laatikon reunat 25% ja 75% datasta ja laatikoiden keskellä on mediaaniviiva. Datassa on mukana satelliitit 1-10.

Kuvassa 1 näkyy ennustustarkkuudet kaikille menetelmille. Huomataan, että suodattimien ennusteen epätarkkuus lisääntyy ennustuksen epätarkkuuden kasvaessa enemmän kuin signaalin ennusteen. Jos siis ennuste on tarkka, suodattimilla päästään hieman tarkempiin tuloksiin. Vastaavasti jos ennusteessa on suuri virhe, signaalin ennuste toimii paremmin.

Huomion arvoista on, että vaikka satelliitin signaali näyttäisi tietyissä tilanteissa toimivan paremmin, Kalmanin suodatin antoi 5 päivän tapauksessa paremman ennustuksen 60% kerroista, 10 päivän ennustuksen tapauksessa 59% kerroista ja 15 päivän tapauksessa 54% kerroista. Vaikka kuvaaja siis näyttäisi satelliitin signaalin olevan ennustamisen kannalta parempi, Kalmanin suodattimella saatiin useammin tarkempi ennustus.

Analyysia suoritettiin myös satelliittikohtaisesti. Jokaiselle satelliitille suoritettiin erikseen vertailu, jossa verrattiin signaalin ennustusta ja suodattimen ennustusta. Näistä katsottiin kumpi on tarkempi. Kuvassa 2 on vertailu kahdesta ennustuksesta 10 päivän kohdalla. Luvut olivat myös samaa luokkaa 5 ja 15 päivän kohdilla.



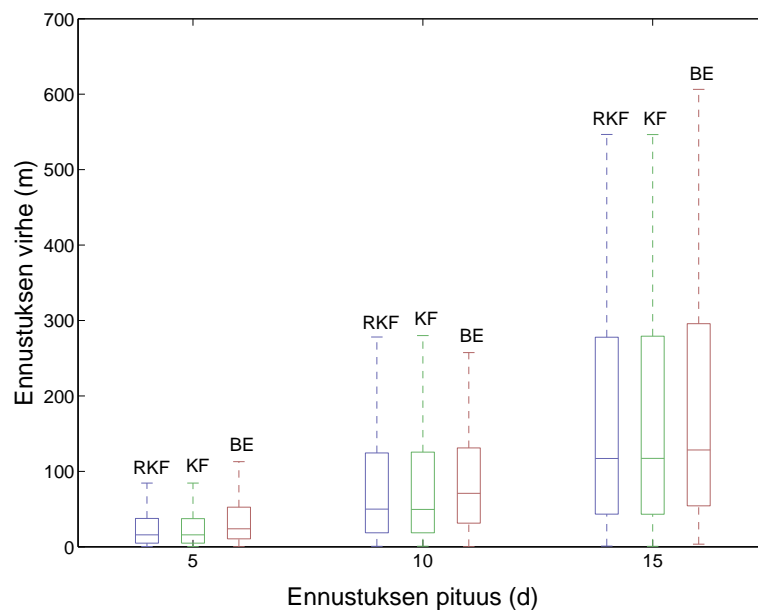
Kuva 2: Broadcast-efemeridin ja Kalmanin suodattimen ennustuksen vertailua. Jos satelliitin kello ei sisällä liikaa poikkeamia, Kalmanin suodattimella saadaan useammin parempi tulos.

Huomataan, että satelliittien 1-5 suodatuksen ennustuksen laatu on huono ja vastaavasti satelliittien 6-10 hyvä. Tämä johtunee poikkeamista, joita käsitellään lisää osiossa 4.3.

Vaikka ennuste- ja suodatusjaksot, jotka sisälsivät ulkolaisia jätettiin pois, saattoi dataan jäädä jaksoja, jotka sisälsivät pieniä poikkeamia. Nämä poikkeamat olivat vaikutuksiltaan niin pieniä, että poistamiseen käytetty algoritmi ei osannut poistaa niitä datasta, mutta kuitenkin niin suuria, että niiden vaikutus ennustustarkkuuteen on huomattava.

Edellinen hypoteesi voidaan vahvistaa tarkastelemalla tarkemmin kelloja, jotka eivät juuri ollenkaan sisältäneet poikkeamia. Näitä ovat satelliitit 6-10, joiden ennustustarkkuus tästä syystä on luultavasti parempi.

Kun suoritettiin vastaava analyysi näille satelliiteille, on selvästi huomattavissa kuvasta 3, että ennustustarkkuus suodattimilla on huomattavasti useammin parempi kuin pelkällä signaalilla. Myös ennustuksen virhe putosi noin kolmanneksen kun jätettiin pois poikkeavasti käyttäytyvät satelliitit. Satelliittien 1-5 poikkeamien laatu on siis sellainen, että ne tekevät ennustuksista keskimäärin huomattavasti huonompia.



Kuva 3: Ennustuksen virhe satelliiteille 6-10.

Kun näille satelliiteille suoritettiin vastaava analyysi kuin kaikille satelliiteille, havaittiin, että 5 päivän ennustuksista 69%, 10 päivän ennustuksista 68% ja 15 päivän ennustuksista 59% oli parempi Kalmanin suodattimella. Erityisesti siis Kalmanin suodattimen käyttö on kannattavaa, kun ennustuksen pituus on alle kaksi viikkoa.

Vaikka ennusteen laatu parani huomattavasti poistettaessa poikkeavasti käyttäytyvät satelliitit, on ennusteen laatu silti erittäin huono verrattuna esimerkiksi GPS-satelliittiin.



Kuvasta 3 nähdään, että Beidou-satelliitin 10 tai 15 päivän ennuste voi sisältää satojen metrien virheen. Vastaava analyysi suoritettiin myös GPS-satelliiteille, josta saatiin huomattavasti parempia tuloksia. Näille satelliiteille vastaava luku (90% datasta) oli vain joitakin kymmeniä metrejä tai maksimissaan sadan metrin luokkaa. Myös GPS-järjestelmässä suodattimen käyttö paransi hieman ennusteen laatua. Verrattuna GPS-järjestelmään Beidoun kellojen ennustettavuus on siis erittäin heikko.

Satelliittipaikannuksessa avustetietojen virheen kriittisen rajan voidaan olettaa olevan noin sata metriä. Tämän vuoksi Beidou-järjestelmän kellojen ennustaminen yli viikon ajalta ei anna enää luotettavaa tietoa, sillä virhe kasvaa tämän ajan jälkeen hyvin nopeasti liian suureksi.

Kuvista 1 ja 3 tarkasteltuna virhe näyttää melko suurelta. Kuitenkin kun tarkastellaan mediaaniviivaa, eli rajaa, jonka alla on 50% datasta, huomataan, että virhe on vain sadan metrin luokkaa 15 päivän kohdalla. Vastaava prosenttilukema GPS-järjestelmässä oli siis 90%. Noin puolissa tapauksista päästään siis suuruusluokaltaan yhtä hyvään tarkkuuteen, kuin mihin päästään keskimäärin koko GPS-järjestelmässä.

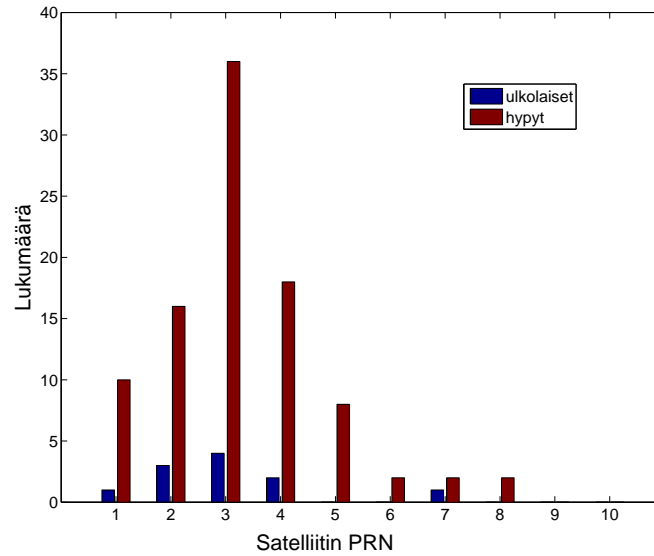
### 4.3 Hypyt ja ulkolaiset

Kappaleessa 3 mainittiin poikkeamat, eli hypyt ja ulkolaiset. Nämä ovat siis ennustusta vaikeuttavia ja sen laatua heikentäviä tekijöitä ja ihanteellisissa olosuhteissa näitä ei esiintyisi. Todellisuudessa näitä kuitenkin on ja Beidou-järjestelmässä nämä kuvatut ilmiöt ovat vieläpä yleisempiä kuin esimerkiksi GPS-järjestelmässä.

Tarkastelujakson aikana yleisimpiä hypyt olivat geostationäärisillä satelliiteilla. Muilla satelliiteilla esiintyi vain muutamia hyppyjä ja ulkolaisia tai ei jopa ollenkaan, mutta geostationäärisillä näitä oli pahimmillaan jopa kymmeniä.

Kuvaan 4 on kerätty ulkolaiset ja hypyt Beidou-satelliiteilta koko tarkastelujakson ajalta. Lukemat eivät välttämättä ole aivan täsmällisiä, mutta ne antavat suunnan siitä kuinka yleisiä hypyt ja ulkolaiset ovat kullekin satelliitille. Vertailun vuoksi otettiin viisi satunnaista GPS-satelliittia ja tarkasteltiin hyppyjen ja ulkolaisten määrää. Kaikilta näiltä koko tarkastelujaksolta löytyi yhteensä vain yksi hyppy eikä yhtään ulkolaista.

Kuvasta 4 nähdään, että erityisesti siis geostationäärisillä satelliiteilla, joita ovat siis satelliitit 1-5, poikkeamat ovat yleisiä. Erityisesti satelliitilla 3 vaikuttaisi olevan erittäin paljon poikkeamia. Vastaavasti muilla satelliiteilla kuin geostationäärisillä poikkeamia on vain muutamia tai ei ollenkaan. Huomataan myös, että hypyt ovat huomattavasti yleisempiä kuin yksittäiset ulkolaiset.

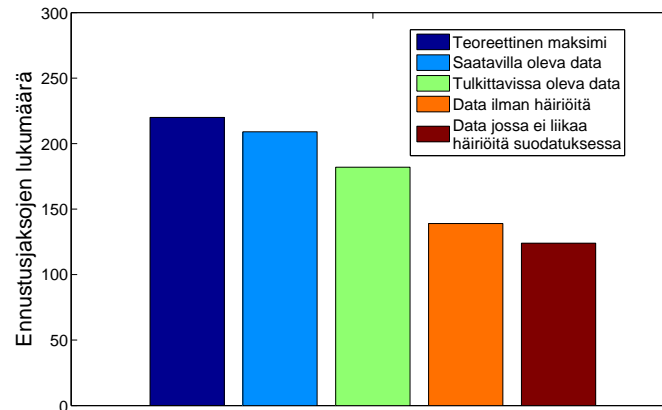


Kuva 4: Poikkeamien lukumäärä. Analyysi suoritettiin vain satelliiteille 1-10, sillä satelliiteilta 11-14 ei ollut saatavilla tarpeeksi dataa, että luotettava analyysi olisi voitu tehdä.

Satelliiteille 11-14 dataa oli huomattavasti vähemmän. Näidenkin satelliittien kelloja analysoitiin saatavilla olevan datan perusteella. Tämän datan perusteella nämä satelliitit käyttäytyivät hyvin samalla tavalla kuin satelliitit 6-10. Poikkeamia oli siis vain muutamia tai ei ollenkaan.

Poikkeamat Beidou-järjestelmässä ovat siis suhteellisen tavallisia, eikä tässä työssä käytetyt suodattimet huomioi niitä tarpeeksi hyvin. Erityisesti hypyt tulisi ottaa paremmin huomioon. Robusti Kalmanin suodatin ottaa huomioon ulkolaiset, mutta kuten kuvasta 4 nähdään, ulkolaisten määrä verrattuna hyppyjen määrään on huomattavan pieni, eikä siis robustilla Kalmanin suodattimella saada parannusta suodatustuloksiin.

Kuvassa 5 esitellään lukumäärät datan saatavuudesta tulosten tulokinnan eri vaiheissa. Näistä lukumääristä kasvatettavista on käytännössä ainoastaan viimeinen lukumäärä eli data, jossa ei ole liikaa häiriötä suodatuksen aikana. Tämän kasvattaminen lähelle seuraavaa lukemaa parantaisi suodattimen laatua verrattuna broadcast-ennustukseen. Tietenkin myös dataa voidaan hankkia lisää, jolloin lukemat myös kasvaisivat, mutta ennustuksen laatuun tämä ei luultavasti vaikuttaisi.



Kuva 5: Lukumäärät datasta. Teoreettinen maksimi on maksimimäärä ennustuksia, joka sisältyy ennustusaikavälille, kertaa satelliittien lukumäärä. Saatavilla oleva data on data, joka saatiin ennustussimulaatioista. Tulkittavissa olevassa datassa dataa on saatavilla 5, 10 ja 15 päivän kohdalla. Data ilman häiriöitä ei sisällä hyppyjä ennustuksen aikana. Data, jossa ei liikaa häiriöitä suodatuksessa tarkoittaa ennustusajanjaksoja, joissa hyppyt suodatuksen aikana eivät vaikuttaneet liikaa ennustustarkkuuteen.

Beidou-järjestelmän ennustettavuutta rajoittaa erityisesti kuvassa 5 näkyvien neljännen ja viidennen palkin ero. Tämä ero kertoo suuresta hyppyjen lukumäärästä, joka sisältyy Beidou-järjestelmään. Tämä onkin luultavasti suurin yksittäinen ennustusta vaikeuttava tekijä.

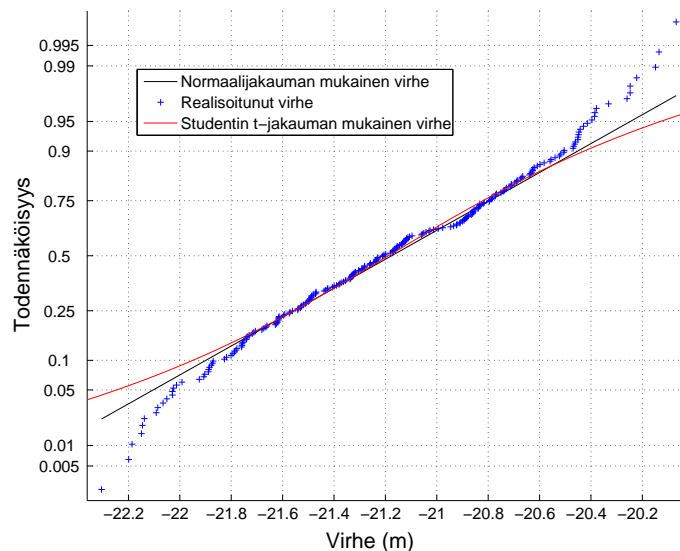
Suosittelavaa siis olisi tutkia sellaisten suodattimien käyttöä, jossa hyppyt huomioidaan, Beidou-järjestelmään. Suodattimet voisi myös määrittää jokaiselle satelliitille erikseen riippuen siitä, mikä takaa parhaan ennustustuloksen. Nämä jätetäänkin jatkotutkimuksen aiheeksi.

#### 4.4 Kellojen virheet

Mittausvirheen jakautuman arvioinnissa käytettiin ainoastaan loogisesti järkeviä lukuja, sekä lukuja, joilla saatiin tarkimmat ennustustulokset. Tämä ei yleisesti ole paras menetelmä mittausvirheen arviointiin, mutta tässä tapauksessa se oli paras ratkaisu.

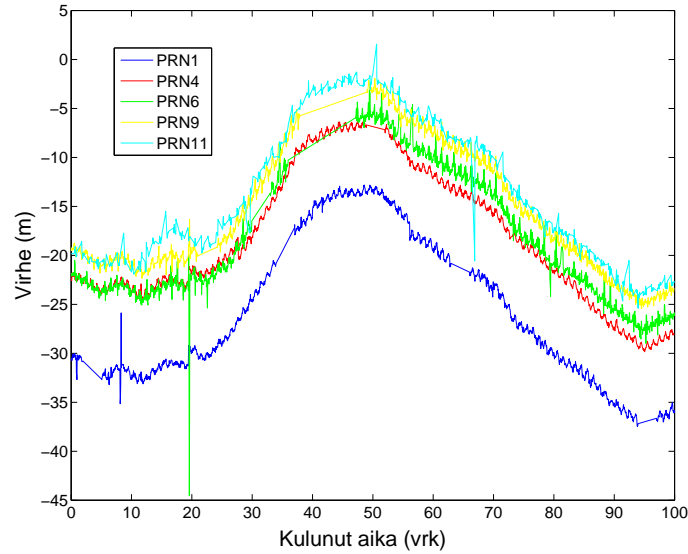
Tavallisesti kellojen mittausvirhettä arvioidaan vertaamalla broadcast-efemeridin ja ns. precise-efemeridin välistä kelloa. Precise-efemeridit ovat tieteellisissä laskentakeskuksissa laskettuja mahdollisimman tarkkoja arvoja. Broadcast-efemeridin virheen suuruus, ja siis myös mittausmallin virheen suuruus voidaan arvioida näiden aikojen erotuksesta, kun oletetaan precise-efemeridin virhe mitättömän pieneksi.

Vaikuttaa kuitenkin siltä, että koko Beidou-järjestelmän kelloissa on "offset", joka on suuruusluokkaa 50–100 ns riippuen satelliitista, siten että lähetetyn signaalin kello on edellä tarkkaa aikaa. Tämä huomataan precise- ja broadcast-efemeridin eroista. Vastaavaan päätelmään on päädytty muun muassa lähteessä [1]. Ero ei ole suuri, mutta matkassa tämä vastaa 15–30 metriä, joka on jo merkittävä matka satelliittipaikannuksessa. Kuvassa 6 on kuvattu tyypillinen jakauma kellojen välisille eroille



Kuva 6: Tyypillinen jakauma precise- ja broadcast-efemeridin kellojen eroista. Virheen yksikkö on muunnettu ajasta suoraan metreiksi kertomalla valon nopeudella. Data on kerätty satelliitilta 4 GPS-viikon 1730 alusta alkaen 10 päivän ajan.

Jakauma ei siis ole nollakeskeinen kuten olisi syytä. Tätä kellojen eroa tarkasteltiin tarkemmin ja päädyttiin siihen tulokseen, että ero sisältää kaksi erillistä eroa aiheuttavaa tekijää. Toinen on jokaisen satelliitin oma, joka aiheuttaa pienen ajasta riippumattoman eron satelliittien välille. Toinen on koko Beidou-järjestelmän "offset", joka muuttuu ajan myötä. Nämä kaksi tekijää ovat nähtävissä kuvassa 7.



Kuva 7: Kellojen offset eri satelliiteille. Data kerättiin GPS-viikon 1730 alusta 100 päivän ajan. Kuvan x-akselilla näkyy tästä ajanhetkestä kulunut aika vuorokausina.

Precise-efemeridejä voisi siis käyttää hyödyksi tarkemmassa analyysissä, kun määritettäisiin nämä kaksi erillistä tekijää ja otettaisiin ne huomioon vertailussa. Tällöin mittaussmallin parametrit voisi määrittää tästä saadun jakauman avulla. Tästä saatavan hyödyn tutkiminen ja käyttö jätetään kuitenkin jatkotutkimuksen aiheeksi.

Koska broadcast-efemeridin ja precise-efemeridin ero oli näinkin suuri, päädyttiin virhejakaumien parametrien arvioinnissa käyttämään kokeellisesti ennustuksen kannalta parhaita lukuja. Lisäksi ennustuksen tarkkuuksien vertailu suoritettiin vain broadcast-efemeridien välillä. Tämän vuoksi kuva 6 ei todellisuudessa kuvaa mallissa esiintyvän virheen ja jakaumien välistä yhteyttä.

## 4.5 Mallin parametrien valinnasta

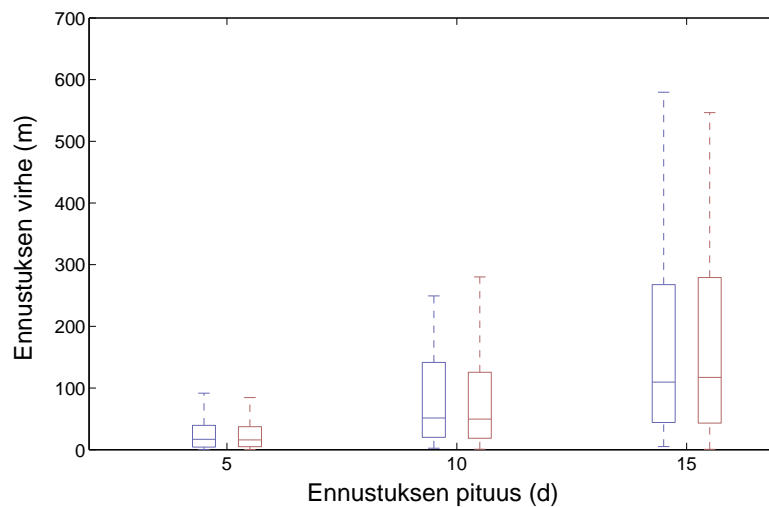
Tarkastellaan vielä lyhyesti miten parametrien valinta vaikuttaa ennustustarkkuuteen.

Alkutilan parametreilla  $m_0$  ja  $P_0$  ei juurikaan ole vaikutusta ennustukseen, sillä ennustusjakso on riittävän pitkä, että ne ehtivät supeta kohti oikeaa arvoa.

Tässä työssä parametri  $R$  valittiin siten, että saadaan paras tulos. Siten sen valinta mitä ilmeisimmin on hyvin tehty. Parametrin  $Q$  valinnan vaikutusta ennustustulokseen myös tutkittiin. Parametri määritettiin tutkimalla kellojen käyttäytymistä ja määrittämällä mallin virheen varianssia. Tämän avulla muodostettiin vakiomatriisi, joka kuvaisi mahdollisimman hyvin kaikkia satelliitteja. Tälle parametrille kokeiltiin myös muita arvoja, mutta ennustustarkkuus ei näillä parantunut. Siten myös parametrin  $Q$  valinnalla ei saavuteta parannusta ennustustarkkuuteen.

Muotoparametri  $\nu$  puolestaan oli tässä työssä 4. Kun tämä parametri on iso, suodatinta vastaa täysin Kalmanin suodatinta. Tälle parametrille kokeiltiin myös arvoja 1, 2 ja 3. Näillä arvoilla ei ennustustarkkuus juurikaan kuitenkaan muuttunut. Koska tavallisen Kalmanin suodattimen ja robustin Kalmanin suodattimen välillä ei ennustustarkkuudessa juurikaan ole eroa, voidaan olettaa, että tämän parametrin valinnalla ei käytännössä ole merkitystä ennustustarkkuuteen.

Mahdollista on myös, että suodatuksessa ei ole saatavilla dataa tasaisin väliajoin. Tällöin käytetään prioriestimaatteja posterioriestimaatteina ja jatketaan suodatusta. Tällaisia ennustusjaksoja oli satunnaisesti.



Kuva 8: Puuttuvan datan vaikutus ennustustarkkuuteen. Punainen laatikko kuvaa alkuperäistä ennustusta ja sininen laatikko ennustusta, jossa osa datasta jätettiin vastanottamatta.

Tällaisten jaksojen vaikutusta ennustustarkkuuteen tutkittiin tarkemmin poistamalla tarkoituksellisesti suodatusajanjaksoilta dataa. Suodatus tehtiin siis edelleen kymmenen päivän ajalta mutta neljännen ja kahdeksannen päivän kohdalla dataa ei vastaanotettu. Kuvassa 8 on verrattu tätä ennustusta alkuperäiseen ennustukseen, joka tehtiin satelliiteille 6-10.

Huomataan, että ei ole juurikaan merkitystä, vaikka osa datasta jää vastaanottamatta. Poikkeamat eivät ole säännöllisiä kumpaankaan suuntaan, joten ei voida sanoa, että toinen ennustaisi paremmin.

Ennustusta kokeiltiin myös vastaanottamalla signali suodatukseen useammin tai harvemmin. Tämä tarkoittaa siis, että signaali vastaanotettiin kahden tai useamman vuorokauden välein tai esimerkiksi kaksi kertaa vuorokaudessa.

Osoittautui, että ennustus ei parane vaikka näytteistysväliä tihennettäisiin. Koeksessa vastaanotettiin signaali 12 tunnin välein eikä tämä parantanut ennustustarkkuutta. Vastaavasti, vaikka signaali vastaanotettaisiin kahden päivän välein, ei tämä vaikuta ennustustarkkuuteen. Kun signaalin vastaanottoväli oli kolme vuorokautta, ennustus huononi hieman, mutta ei vielä kukaan merkittävästi. Kunhan parametrit muokataan kuhunkin aikaväliin sopivaksi, ennustus pysyy yhtä laadukkaana.

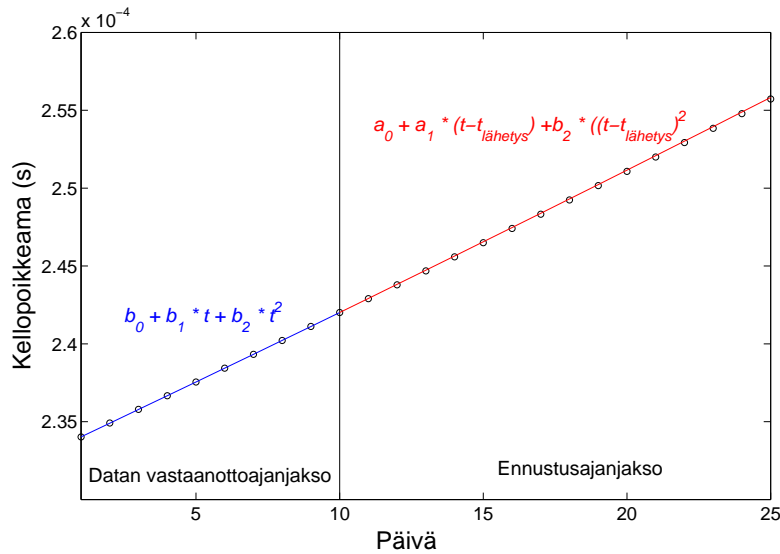
Suodatus tehtiin kaikille muuttujille  $a_0$ ,  $a_1$  ja  $a_2$ . Mahdollista on tehdä myös lineaarinen suodatus. Tässä käytetään siis suodattimia samalla tavalla ja suodatetaan vain kertoimia  $a_0$  ja  $a_1$ . Parametrit muokataan vastaamaan tätä mallia. Tällöin ennustustarkkuus huononi huomattavasti. Paras tulos saatiin, kun suodatettiin toisen asteen polynomia, ja tämän jälkeen tehtiin lineaarinen ennuste.

Valinnoilla ei siis juurikaan voida parantaa ennustustarkkuutta. Kun kellon laatu on hyvä, Kalmanin suodatin ennustaa käytännössä aina paremmin kuin itse signaalin ennuste. Kuitenkaan hyvään ennustustarkkuuteen ei päästä muokkamalla suodattimen parametreja.

## 4.6 Vaihtoehtoinen malli

Suodattimet yliarvioivat toisen asteen kertoimet. Tämän vuoksi suodattimien avulla tehty lineaarinen ennuste toimii paremmin kuin toisen asteen. Kuitenkin toisen asteen sovitus kellojen käyttäytymiselle on tarkempi kuin vain lineaarinen ennuste. Suotavaa olisi siis tehdä myös ennustus toisen asteen sovituksella.

Ongelma voidaan ratkaista hankkimalla kerroin  $a_2$  muualta kuin suodatuksesta. Jos siis dataa on hyvin saatavilla ennen ennustusajanjaksoa, voidaan vastaanotettuun dataan tehdä toisen asteen sovite. Tästä sovitteesta voidaan poimia kerroin  $a_2$  ja muodostaa ennuste suodattimesta ja sovitteesta saaduilla kertoimilla. Voidaan myös muodostaa ennuste vain sovitteesta saaduilla kertoimilla.



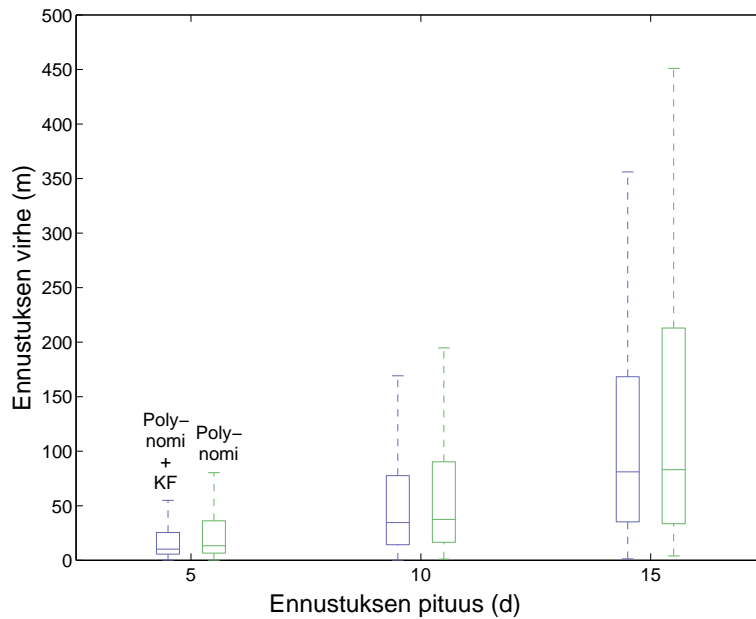
Kuva 9: Uuden mallin havainnollistus. Pelkän suodattimen antama ennustepolynomi on muotoa  $a_0 + a_1 * (t - t_{\text{lähetys}}) + a_2 * (t - t_{\text{lähetys}})^2$ . Pisteet edustavat varsinaista dataa, sininen käyrä on sovitepolynomi ja punainen käyrä on ennustepolynomi.

Kuvassa 9 on esitetty havainnollistus uudesta mallista. Suodatus suoritetaan siis samalla tavalla kuin aiemmin. Kun kymmenen päivän ajalta on kerätty dataa, tälle datalle muodostetaan pienimmän neliösumman menetelmällä toisen asteen polynomisovite, joka kuvassa 9 on esitetty kertoimien  $b_i$  avulla. Suodattimen antama ennustus sisältää kertoimet  $a_i$ , ja kuten kuvasta näkyy, ennustus tehdään molempien kertoimien avulla.

Osoittautuu, että tällä menetelmällä saadaan huomattavasti parempia tuloksia. Toisen asteen polynomisovitteen ennuste toimii huomattavasti paremmin kuin pelkkä suodattimien kautta saatava lineaarinen ennuste. Kuvassa 10 näkyy ennustustulokset pelkälle polynomisovitteen avulla tehdyille ennustukselle ja käyttämällä sekä suodatinta että polynomiennustetta edellä kuvatulla tavalla.

Huomion arvoinen asia on, että ennusteessa on mukana kaikki satelliitit ja ennustustarkkuus on silti parempi kuin pelkällä Kalmanin suodattimella parhaille satelliiteille. Tällä menetelmällä ennustustarkkuus on siis huomattavasti parempi. Huomion arvoinen asia on myös, että vaikka polynomisovitteella saadaan erittäin hyvä ennustustarkkuus, saadaan vielä selvästi parempi käyttämällä suodatinta ja sovitetta. Tällä menetelmällä virhe putoaa noin viidennekseen verrattuna alkuperäiseen signaaliin sisältyvään ennusteeseen.





Kuva 10: Ennuste uudella mallilla.

Uudella mallilla saatiin siis huomattavasti parempia tuloksia. Etenkin verrattuna signaalin ennustukseen saadaan huomattava hyöty, kun käytetään uutta mallia ennustuksen tekemisessä. Uuden mallin ennustus on jo huomattavasti lähempänä GPS-satelliitin ennustuksen tasoa.

Menetelmän heikkous on se, että se vaatii paljon dataa toimiakseen. Kymmenen päivän ajalta täytyy saada paljon dataa, jotta luotettava sovite voidaan tehdä. Suodattimen tapauksessa dataa ei tarvita aivan niin paljoa. Kuitenkin ennustus-tarkkuuden parantuminen on niin huomattava, että uusi menetelmä on ehdottomasti parempi.

Menetelmää voitaisiin luultavasti vielä parantaa muokkaamalla suodattimia. Laativalla suodatin, joka huomioi toisen asteen termin vastaavalla tavalla, saataisiin luultavasti vieläkin parempia tuloksia ja päästäisiin todennäköisesti jo erittäin lähelle GPS-satelliitin ennustustuloksia. Tällaisen suodattimen laatiminen jätetään kuitenkin jatkotutkimuksen aiheeksi.

## 5 Yhteenveto

Tässä työssä käsiteltiin Beidou-satelliittijärjestelmää ja sen kelloja. Kellojen ennustamista varten esiteltiin suodatuksen käsite, sekä kaksi erilaista suodatinta, Kalmanin suodatin ja robusti Kalmanin suodatin. Ennustustuloksia verrattiin vastaaviin lukuihin GPS-järjestelmässä.

Beidou-järjestelmän kellojen laatu osoittautui erittäin huonoksi verrattuna GPS-järjestelmään. Ennustamattomien poikkeamien lukumäärä on huomattavasti suurempi, ja kellojen ennustaminen on tämän vuoksi erittäin haastavaa. Myös ennustusten tarkkuus oli huomattavasti heikompi kuin esimerkiksi GPS-järjestelmässä. Vaihtoehtoisella mallilla päästiin jo melko lähelle GPS-järjestelmän ennustustarkkuutta, mutta tämä vaatii paljon dataa.

Kuitenkaan vaikka päästäisiin lähelle GPS-järjestelmän tarkkuutta, rajoittaa Beidou-järjestelmän ennustettavuutta hyppyjen erittäin suuri lukumäärä. Mikäli ennustusajanjaksossa tapahtuu hyppy, luotettava ennustaminen muuttuu käytännössä mahdottomaksi. Tämän vuoksi hyppyt ovat luultavasti suurin rajoitin Beidou-järjestelmän ennustamisessa.

Yksi vaihtoehto on tutkia hyppyjen suuruutta ja tapahtumisvälejä, ja yrittää etsiä yhteyksiä hyppyjen väliltä. Hyppyjen ennustaminen voisi parantaa huomattavasti ennustusta. Myös erilaisten mallien käyttöä voisi kokeilla ennustuksen parantamiseksi. Nämä jätetäänkin jatkotutkimuksen aiheeksi.

## Viitteet

- [1] O. Montebruck, P. Steigenberger. The BeiDou Navigation Message. International Global Navigation Satellite Systems Society IGNS Symposium 2013.
- [2] RINEX - The Receiver Independent Exchange Format. Version 3.02. International GNSS Service, RINEX Working Group and Radio Technical Commission for Maritime Services Special Committee 104. 3.4.2013.
- [3] S. Martikainen. GPS-satelliitin kellopoikkeaman robusti estimointi. Diplomityö. Tampereen Teknillinen Yliopisto. 2012.